Université d'Orléans

ECOLE SUPÉRIEURE DE L'ENERGIE ET DES MATÉRIAUX

Option : Spéciales P

Le problème comporte trois parties. Ces trois parties sont indépendantes, à l'exception de la question **1 b)** *de la partie* **III**, *qui utilise les définitions de la partie* **I**.

Partie I

Définitions et notations

On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que la série $\sum a_n$ converge.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 (éventuellement infini).

Pour $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$, on considère l'application :

$$\left| \begin{array}{rcl} f_A : [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_A(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{array} \right.$$

Enfin on dit qu'*une série* $\sum a_n$ *converge au sens d'Abel* si :

i) $(a_n) \in \mathcal{S}$

ii) f_A admet une limite à gauche en 1. Cette limite s'appelle *la somme d'Abel de la série* $\sum a_n$.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des éléments $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ tels que $\sum a_n$ converge au sens d'Abel. Lorsque A est élément de $\mathcal{A}$ on prolongera f_A en 1 en posant $f_A(1) = \lim_{x\to 1^-} f_A(x)$ et on notera encore f_A la fonction ainsi prolongée.

1) **a)** Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

b) Montrer que si $\sum a_n$ converge au sens d'Abel, alors la fonction f_A associée est continue sur $[0,1]$.

c) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

2) Etudier, dans les cas suivants, la convergence au sens usuel et la convergence au sens d'Abel, en précisant, quand elles existent, la valeur de la somme usuelle et de la somme d'Abel de la série $\sum a_n$ pour :

a) $a_n = \dfrac{1}{(2n)!}$.

b) $a_0 = 0$, et $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $a_n = (-1)^n$.

Les deux types de convergence coïncident-ils ?

3) Dans cette question on veut montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{C}$, ce qui signifie que la série $\sum a_n$ converge. On note S sa somme et R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

a) Montrer que $R \geqslant 1$, et que si $R > 1$, alors la série $\sum a_n$ converge au sens d'Abel et sa somme d'Abel est S.

b) On suppose que $R = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ pour x réel tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Soit ε un réel, $\varepsilon > 0$.

i) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|R_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

ii) Justifier, pour tout entier n et pour tout entier $p > n+1$, l'égalité :

$$\forall\, x \in [0,1],\quad S_p(x) - S_n(x) = x^{n+1}R_n + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^{k+1} - x^k)R_k - x^p R_p.$$

iii) En déduire que, pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $p > n+1$:

$$\forall\, x \in [0,1],\quad |S_p(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}) + x^p\right).$$

iv) Montrer que la suite (S_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $\widehat{f}$ que l'on précisera.

v) Conclure.

c) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

4) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$. On suppose que pour tout n, $a_n \geqslant 0$. On note S la somme d'Abel de la série $\sum a_n$.

a) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$. Montrer que $\sum_{k=0}^{N} a_k x^k \leqslant S$.

En déduire que la série $\sum a_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leqslant S$.

b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

5) Si $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, on pose $\|A\| = \int_0^1 |f_A(t)|\,dt$.

(Pour la définition de f_A, voir *Définitions et notations.*)

a) Montrer que $A \mapsto \|A\|$ est une norme sur $\mathcal{A}$.

b) Calculer $\|A\|$ pour chacun des exemples de **2)**, lorsque cela a un sens.

c) Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$.

Montrer que la série $\sum \frac{a_n}{n+1}$ converge et calculer $\|A\|$.

Partie II

1) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!}\, dt$. Justifier, pour tout n, la convergence de cette intégrale, et calculer I_n.

2) On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$ et en déduire que la fonction :

$$x \longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

On dit que la série $\sum a_n$ *converge au sens de Borel* si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-t}\, dt$ converge, et on appelle alors cette intégrale *somme de Borel de la série* $\sum a_n$.

3) Etudier la convergence de $\sum a_n$ au sens de Borel dans les cas suivants :

a) $a_n = (-1)^n$.

b) $a_{2n} = (-1)^n$ et $a_{2n+1} = 0$.

c) $a_n = 1$ si $n = p$, et $a_n = 0$ si $n \neq p$ $(p \in \mathbb{N}$ fixé).

4) Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ des suites bornées dont la série associée converge au sens de Borel est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

5) On donne une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ converge. On pose $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et on définit la fonction f comme en **2)**.

a) Soit X un réel, $X > 0$. Montrer que :

$$\int_0^X f(x)\, e^{-x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \int_0^X \frac{x^n}{n!}\, e^{-x}\, dx \right).$$

b) Montrer que la série $\sum a_n$ converge au sens de Borel et que sa somme de Borel S' est inférieure ou égale à S.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\, e^{-x}\, dx \right) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-x}\, dx$$

et en déduire que $S = S'$.

Partie III

Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, et $\mathcal{P}_p$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels qui vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+p} = a_n$.

On pose, pour $A = (a_n) \in \mathcal{P}_p$, $\psi(A) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k$ et $\theta(A) = (a_0, a_1, \ldots, a_{p-1})$.

Il est clair qu'un élément A de $\mathcal{P}_p$ est totalement déterminée par la donnée de $\theta(A)$.

1) Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{P}_p$.

   a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum a_n$ converge.

   b) Montrer que la série $\sum a_n$ converge au sens d'Abel si et seulement si $\psi(A) = 0$.

   On pose : $\mathcal{H} = \{ A = (a_n) \in \mathcal{P}_p \mid \psi(A) = 0 \}$.

2) Montrer que $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel de dimension $p-1$ sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, on note U_k la suite, appartenant à $\mathcal{P}_p$, telle que :

   $$\theta(U_k) = (1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$$

   (-1 étant la $(k+1)$–ième composante du p–uplet).

3) Montrer que $(U_1, U_2, \ldots, U_{p-1})$ est une base de $\mathcal{H}$.

4) On considère l'application $\left| \begin{array}{l} D : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ définie par : } b_n = a_{n+1}. \end{array} \right.$

   Montrer que D est linéaire et donner sa matrice dans la base $(U_1, \ldots, U_{p-1})$.

5) On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $M \in \mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{R})$.

   a) Calculer M^p et le déterminant de M.

   b) Déterminer les valeurs propres réelles de M et préciser les vecteurs propres associés. (On sera amené à distinguer les cas p pair et p impair.)